Metody numeryczne

Instrukcja 6

Całkowanie numeryczne

Robert Kazała

1 Całkowanie numeryczne

1.1 Całkowanie numeryczne funkcji

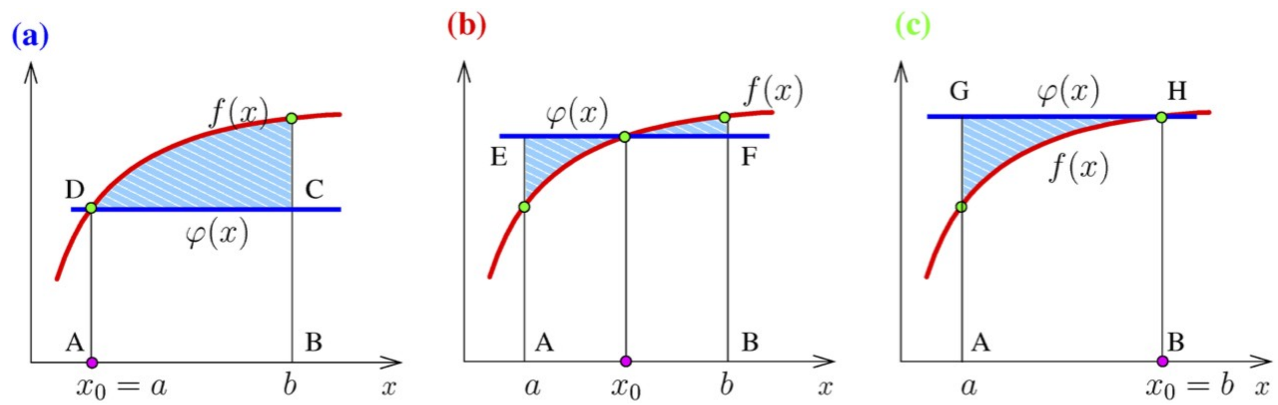
Całkowanie numeryczne polega na przybliżonym obliczaniu całek oznaczonych. Termin kwadratura numeryczna jest synonimem całkowania numerycznego.

1.2 Metoda prostokątów

Najprostszym sposobem obliczenia całki oznaczonej z funkcji f(x) jest przybliżenie jej przy pomocy metody prostokątów.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \phi(x)\,dx = \int_a^b f(x_0)\,dx = (b-a)\,f(x_0)$$

W zależności od położenia węzła otrzymuje się wzory:
a) lewych prostokątów,
b) środkowych prostokątów,
c) prawych prostokątów.

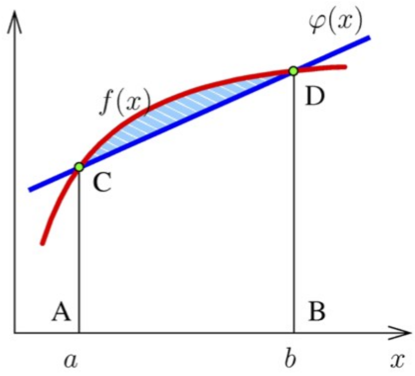


1.3 Metoda trapezów

Jezeli do interpolacji funkcji f(x) zastosowany zostanie liniowy wielomian interpolacyjny Lagrange'a, otrzymuje się wzór kwadraturowy nazywany wzorem trapezów.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \left[f_0 L_0^1(x) + f_1 L_1^1(x)\right] dx = \int_a^b \left[f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}\right] dx =$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] \qquad E = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f^{(2)}(\xi)$$



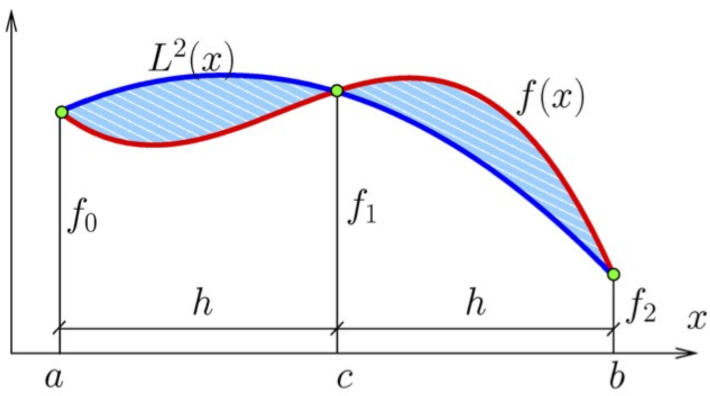
1.4 Metoda parabol - Simpsona

Jezeli do interpolacji funkcji f(x) zastosowany zostanie kwadratowy wielomian interpolacyjny Lagrange'a, otrzymuje się wzór kwadraturowy nazywany wzorem parabol.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \left[f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)\right] dx =$$

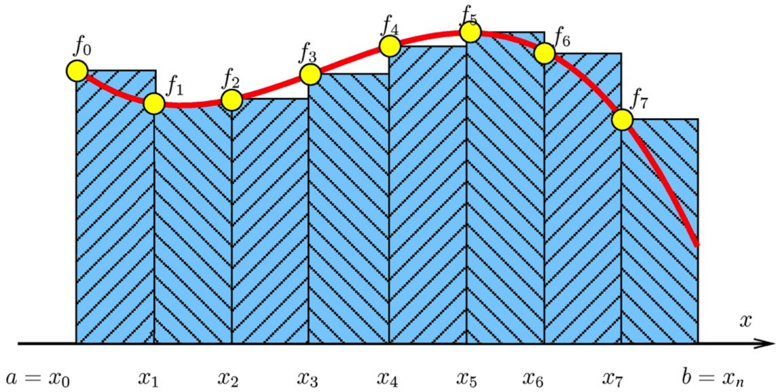
$$= \int_a^b \left[f(0)\frac{(x-c)(a-b)}{(a-b)(a-b)} + f(1)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + f(2)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}\right] dx =$$

$$= \frac{b-a}{6}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right) \qquad E = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$$



1.5 Metody iteracyjne

Podstawowe metody całkowania numerycznego polegają na przybliżeniu całki za pomocą odpowiedniej sumy ważonej wartości całkowanej funkcji w kilku punktach. Aby uzyskać dokładniejsze przybliżenie, należy podzielić przedział całkowania na niewielkie fragmenty. Ostateczny wynik jest sumą oszacowań całek w poszczególnych podprzedziałach. Najczęściej przedział dzieli się na równe podprzedziały, ale bardziej wyszukane algorytmy potrafią dostosowywać krok do szybkości zmian wartości funkcji.



2 Zadania do wykonania

Zadanie 1

Wyznaczyć w sposób analityczny i numeryczny wartość całki funkcji

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

oraz wybranych funkcji własnych. Zastosować iteracyjną metodę prostokątów lewych, środkowych i prawych dla kilku przedziałów całkowania oraz różnych kroków całkowania. Określić wartość błędu.

Zadanie 2

Dla funkcji z zadania 1 zastosować iteracyjną metodę trapezów i parabol dla kilku przedziałów całkowania oraz różnych kroków całkowania. Określić wartość błędu.

Zadanie 3

Dla funkcji z zadania 1 zastosować metody całkowania dostępne w bibliotece *scipy.integrate*.