Metody numeryczne
wykład 7

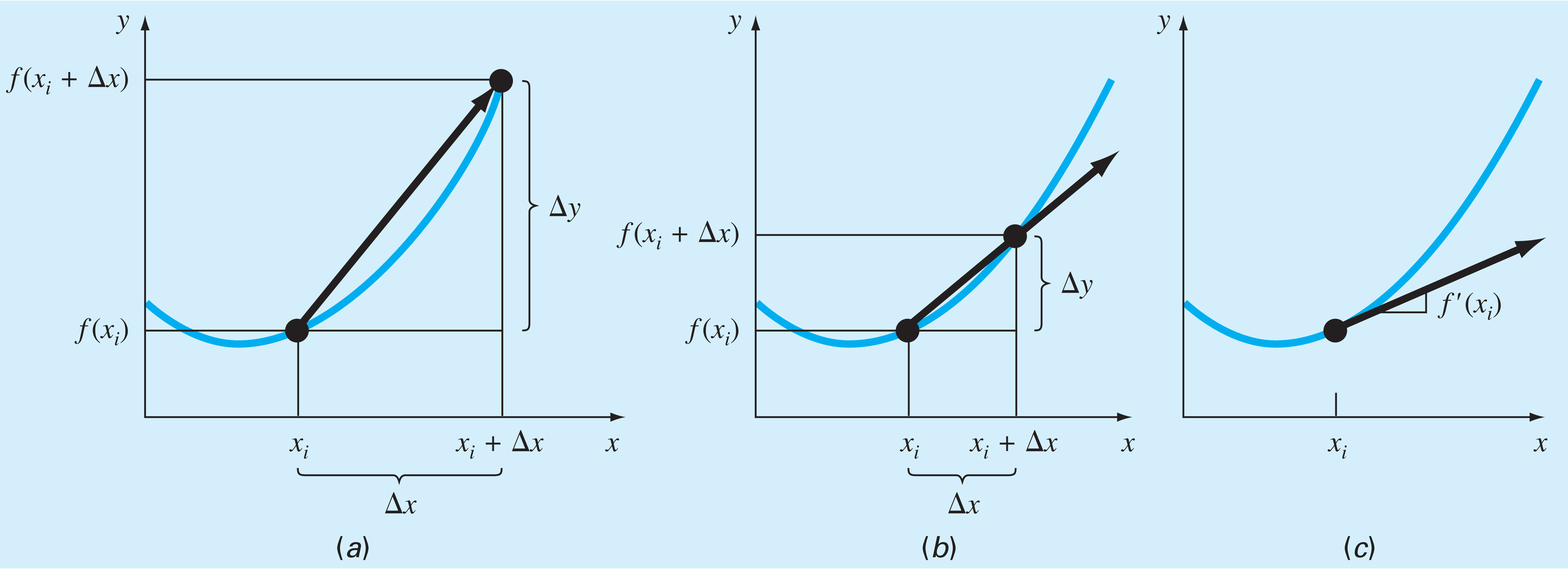
różniczkowanie

Michał Łaskawski

11.01.2018

Wprowadzenie

Pochodna - szybkość zmian zmiennej zależnej w odniesieniu do zmiennej niezależnej.



Graficzna definicja pochodnej: gdy $\Delta x \to 0$, (od a do c), aproksymacja różnicowa staje się pochodną

Matematyczna definicja pochodnej wywodzi się z aproksymacji różnicowej:

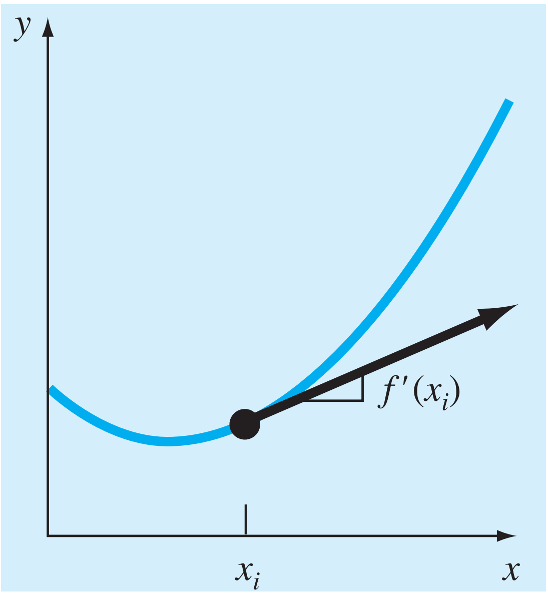
(1) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \qquad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

y, $f(x)$ - zmienna zależna, x - zmienna niezależna

Wprowadzenie

dy/dx (lub y' lub $f'(x_i)$) jest pierwszą pochodną y w odniesieniu do x w punkcie x_i.

(2)
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$



Pochodna jest nachyleniem stycznej do krzywej w punkcie x_i.

Druga pochodna jest pochodną pierwszej pochodnej.

(3)
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Druga pochodna informuje o tym jak szybko zmienia się nachylenie.

- Druga pochodna często nazywana jest krzywizną, bowiem większa wartość drugiej pochodnej oznacza większą krzywiznę krzywej.

Pochodne cząstkowe są używane dla funkcji, które zależą od więcej niż jednej zmiennej.

- Pochodna cząstkowa może być interpretowana jako wyznaczenie pochodnej funkcji w punkcie, której wszystkie zmienne oprócz jednej są ustalone.

Przykład: pochodna funkcji $f(x,y)$:

(4)
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Różniczkowanie w inżynierii i nauce

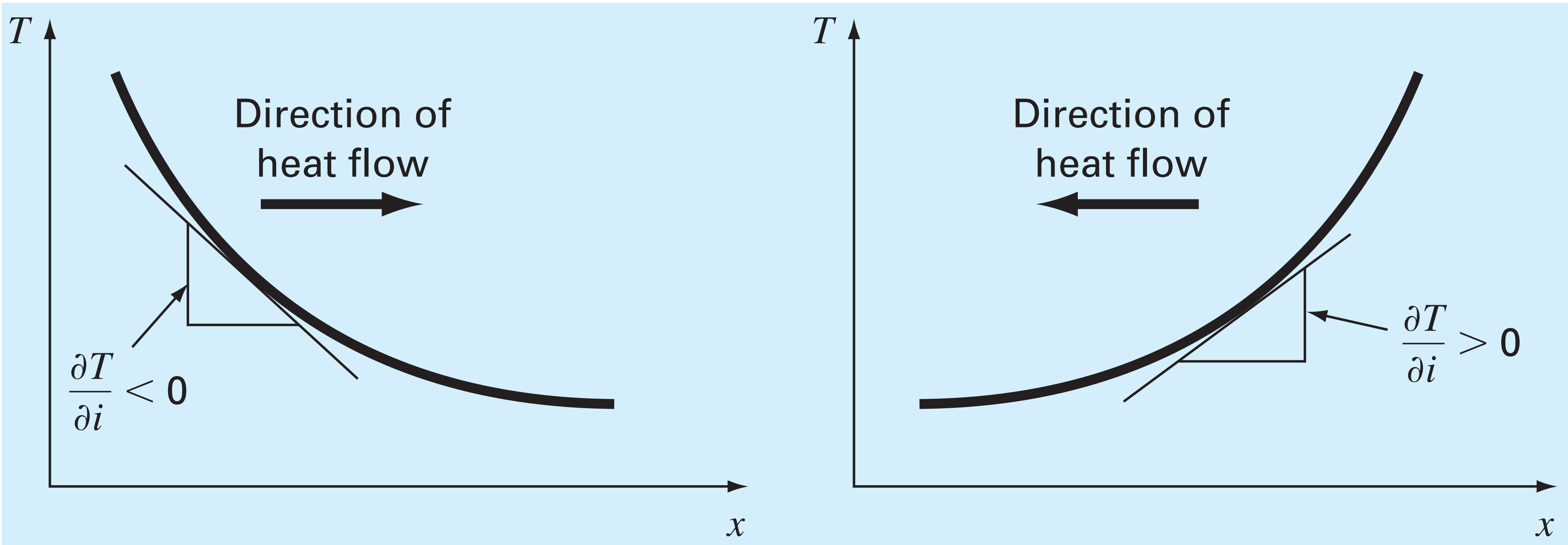
Przykład: Prawo przewodnictwa cieplnego (prawo Fouriera)

Dla przypadku jednowymiarowego:

(5) $$q = -k\frac{dT}{dx}$$

gdzie: $q(x)$ = strumień ciepła ($\mathrm{W/m^2}$), k = współczynnik przewodności cieplnej ($\mathrm{W/(m\,K)}$), T = temperatura (K), x = odległość (m).

Dla rozważanego przypadku, pochodna lub inaczej gradient jest miarą intensywności przestrzennej zmiany temperatury, która jest siłą napędową przepływu ciepła.



Pozytywny przepływ określony jest ujemnym gradientem (stąd znak: — we wzorze)

Różniczkowanie w inżynierii i nauce

Przykład: Jednowymiarowe formuły istotnych praw często wykorzystywanych w inżynierii i nauce:

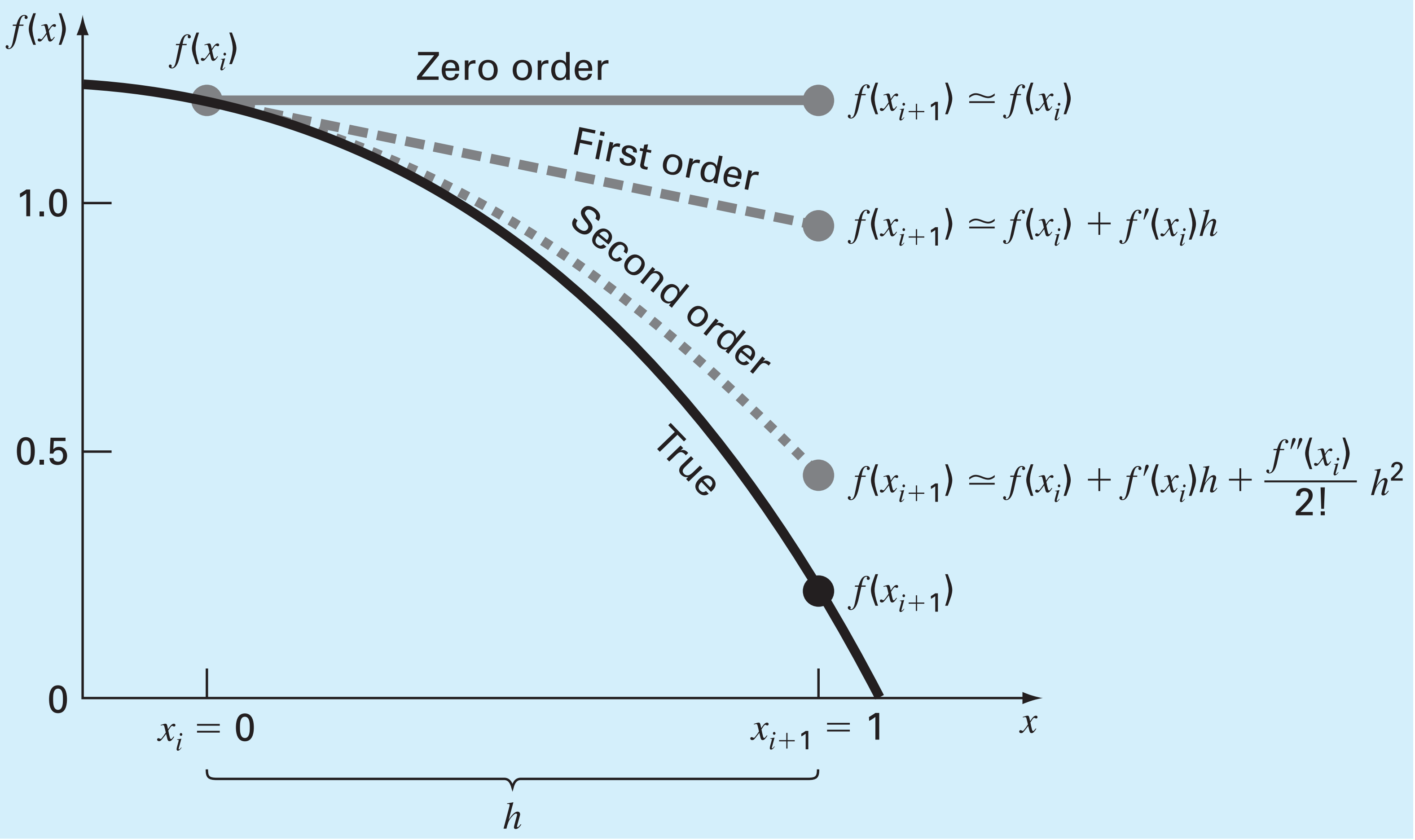
Law	Equation	Physical Area	Gradient	Flux	Proportionality
Fourier's law	$q = -k\dfrac{dT}{dx}$	Heat conduction	Temperature	Heat flux	Thermal Conductivity
Fick's law	$J = -D\dfrac{dc}{dx}$	Mass diffusion	Concentration	Mass flux	Diffusivity
Darcy's law	$q = -k\dfrac{dh}{dx}$	Flow through porous media	Head	Flow flux	Hydraulic Conductivity
Ohm's law	$J = -\sigma\dfrac{dV}{dx}$	Current flow	Voltage	Current flux	Electrical Conductivity
Newton's viscosity law	$\tau = \mu\dfrac{du}{dx}$	Fluids	Velocity	Shear Stress	Dynamic Viscosity
Hooke's law	$\sigma = E\dfrac{\Delta L}{L}$	Elasticity	Deformation	Stress	Young's Modulus

Wybrane powyższe prawa, definiują modele matematyczne, które wykorzystywane są w wielu obszarach nauki i techniki.

Możliwość dokładnej estymacji wartości pochodnej, jest istotnym aspektem sprawnej i wydajnej pracy w danej dziedzinie nauki i techniki.

Szeregi Tylora

Twierdzenie Tylora stwierdza, że każdą gładką funkcję można aproksymować przy pomocy wielomianu. Szeregi Tylora są matematycznym narzędziem, który to umożliwia.



Aproksymacja funkcji $f(x) = -0.1\,x^4 - 0.15\,x^3 - 0.5\,x^2 - 0.25\,x + 1.2$ dla $x = 1$.

Kompletny szereg Tylora:

(6) $$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n \qquad R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

Szeregi Tylora

Reszta szeregu Tylora:

(7)
$$R_n = O(h^{n+1})$$

jest równa:

$$O(h^{n+1})$$
(8)

Jest to błąd obcięcia rzędu h^{n+1}.

Błąd ten jest proporcjonalny do kroku h podniesionego do $n+1$ potęgi.

Przykład:
Jeżeli błąd jest rzędu $O(h)$, podzielenie przedziału na połowę, zmniejsza błąd o połowę.
Jeżeli błąd jest rzędu $O(h^2)$, podział przedziału na połowę zmniejszy błąd czterokrotnie.

Ogólnie można przyjąć, że zaokrąglenie błędu zmniejsza się przez dodawanie kolejnych fragmentów szeregu Tylora.

W wielu przypadkach jeżeli krok jest wystarczająco mały, wtedy szeregi niskiego rzędu wystarczają do uzyskania zadowalającej dokładności.

Różniczkowanie numeryczne

Różnica skończona może być przedstawiona przy pomocy wzoru:

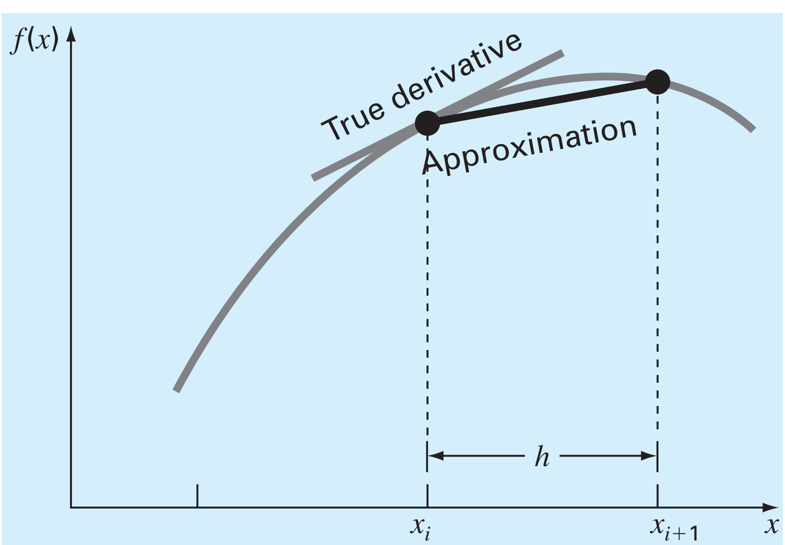
(9)
$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(x_{i+1} - x_i)$$

lub

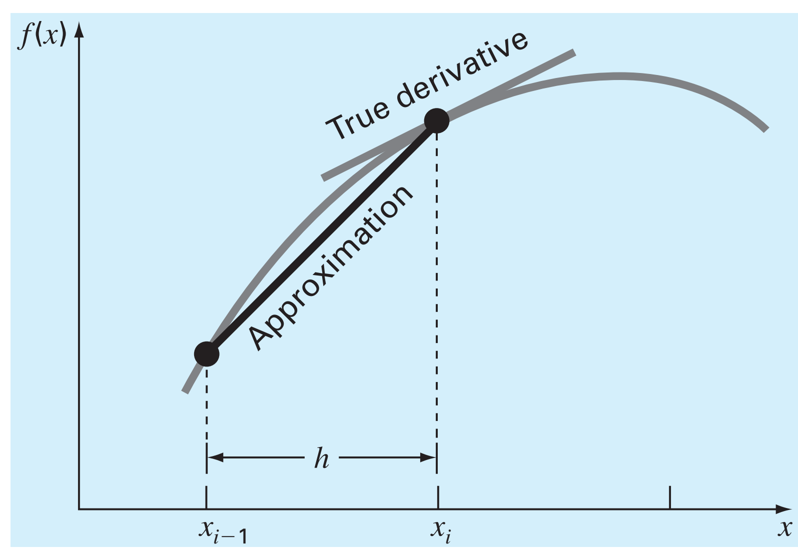
(10)
$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

gdzie, h jest krokiem i stanowi przedział aproksymacji $x_{i+1} - x_i$.

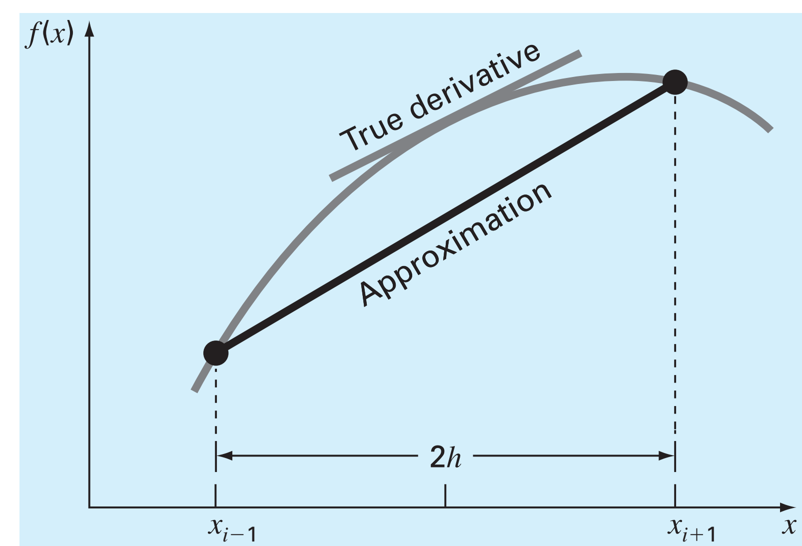
Przedstawione zależności stanowią progresywne różnice skończone.



Forward finite-differeces
Progresywne różnice skończone



Backward finite-differeces
Regresywne różnice skończone



Centered finite-differeces
Centralne różnice skończone

Różniczkowanie numeryczne

Szereg Tylora można rozwinąć wstecz, tak aby uzyskać regresywne różnice skończone:

(11) $$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \cdots$$

Odrzucając fragmenty szeregu Tylora po pierwszej pochodnej oraz przekształcając wynik uzyskuje się:

(12) $$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

gdzie, błąd zaokrąglenia wynosi ***O(h)***.

Odejmując od wyrażenia (13), formułę (11),

(13) $$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \cdots$$

uzyskuje się:

(14) $$f(x_{i+1}) = f(x_{i-1}) + 2f'(x_i)h + 2\frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \cdots$$

którą można przedstawić w poniższy sposób:

(15) $$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{f^{(3)}(x_i)}{6}h^2 + \cdots \quad \text{lub} \quad f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - O(h^2)$$

Jest to formuła określająca centralny iloraz różnicowy (centralne różnice skończone).

Różniczkowanie numeryczne

Zadanie: Wyznaczyć wartość pierwszej pochodnej funkcji

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

w punkcie $x = 0.5$ dla kroku $h = 0.5$ i $h = 0.25$. Użyć Użyć ilorazów: progresywnego $O(h)$, regresywnego $O(h)$ oraz centralnego $O(h^2)$. Uwaga, dokładna wartość pochodnej określona jest zależnością:

$$f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - 1.0x - 0.25$$

i w zadanym punkcie wynosi: $f'(0.5) = -0.9125$.

Rozwiązanie: Dla $h = 0.5$, wartości funkcji wynoszą:

$$\begin{aligned} x_{i-1} &= 0 & f(x_{i-1}) &= 1.2 \\ x_i &= 0.5 & f(x_i) &= 0.925 \\ x_{i+1} &= 1.0 & f(x_{i+1}) &= 0.2 \end{aligned}$$

Pierwsza pochodna wyznaczona progresywnym ilorazem skończonym wynosi:

$$f'(0.5) \cong \frac{0.2 - 0.925}{0.5} = -1.45 \qquad |\varepsilon_t| = 58.9\%$$

Różniczkowanie numeryczne

Pierwsza pochodna wyznaczona regresywnym ilorazem skończonym wynosi:

$$f'(0.5) \cong \frac{0.925 - 1.2}{0.5} = -0.55 \qquad |\varepsilon_t| = 39.7\%$$

Pierwsza pochodna wyznaczona centralnym ilorazem skończonym wynosi:

$$f'(0.5) \cong \frac{0.2 - 1.2}{1.0} = -1.0 \qquad |\varepsilon_t| = 9.6\%$$

Dla $h = 0.25$, wartości funkcji wynoszą:

$$\begin{aligned} x_{i-1} &= 0.25 & f(x_{i-1}) &= 1.10351563 \\ x_i &= 0.5 & f(x_i) &= 0.925 \\ x_{i+1} &= 0.75 & f(x_{i+1}) &= 0.63632813 \end{aligned}$$

Pierwsza pochodna wyznaczona progresywnym ilorazem skończonym wynosi:

$$f'(0.5) \cong \frac{0.63632813 - 0.925}{0.25} = -1.155 \qquad |\varepsilon_t| = 26.5\%$$

Pierwsza pochodna wyznaczona regresywnym ilorazem skończonym wynosi:

$$f'(0.5) \cong \frac{0.925 - 1.10351563}{0.25} = -0.714 \qquad |\varepsilon_t| = 21.7\%$$

Różniczkowanie numeryczne

Pierwsza pochodna wyznaczona centralnym ilorazem skończonym wynosi:

$$f'(0.5) \cong \frac{0.63632813 - 1.10351563}{0.5} = -0.934 \qquad |\varepsilon_t| = 2.4\%$$

Dla obydwu kroków, pochodne wyznaczone ilorazem centralnym są najdokładniejsze.

Efekt ten wynika również z analizy szeregu Tylora, podział kroku na połowę w przybliżeniu zmniejsza o połowę błąd obcięcia dla ilorazów progresywnych i regresywnych. Dla ilorazów centralnych błąd ten jest w przybliżeniu aż czterokrotnie mniejszy.

Aproksymacja pochodnych wyższego rzędu

Aproksymacja pochodnych wyższego rzędu szeregu Tylora rozwiniętego dla $f(x_{i+2})$:

(16) $$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)}{2!}(2h)^2 + \cdots$$

Równanie (13) należy pomnożyć przez 2 a następnie odjąć od (16):

(17) $$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \cdots$$

Rozwiązując zależność (17), uzyskuje się wzór na progresywny iloraz różnicowy drugiego rzędu:

(18) $$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

W podobny sposób uzyskuje się iloraz regresywny:

(19) $$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + O(h)$$

Iloraz centralny może być wyprowadzony poprzez dodanie (11) i (13) oraz uporządkowanie wyniku:

(20) $$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

Analiza błędów różniczkowania numerycznego

Aproksymacja pierwszej pochodnej przy pomocy centralnego ilorazu różnicowego:

(20)
$$\underbrace{f'(x_i)}_{\text{wartość rzeczywista}} = \underbrace{\frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}}_{\text{iloraz różnicowy aproksymacja}} - \underbrace{\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}h^2}_{\text{błąd obcięcia}}$$

Jeżeli wartości funkcji w liczniku ilorazu różnicowego nie posiadają błędu zaokrąglenia, to przybliżenie pochodnej obarczone jest jedynie błędem obcięcia.

Jednakże używając maszyny cyfrowej, wartości funkcji zawsze będą obarczone błędem zaokrąglenia:

$$f(x_{i-1}) = \tilde{f}(x_{i-1}) + e_{i-1}$$
$$f(x_{i+1}) = \tilde{f}(x_{i+1}) + e_{i+1}$$

gdzie, $\tilde{f}$ są błędami zaokrągleń wartości funkcji, e są skojarzonymi z nimi błędami obcięcia.

Podstawiając powyższe zależności do równania (20), otrzymuje się:

$$\underbrace{f'(x_i)}_{\text{wartość rzeczywista}} = \underbrace{\frac{\tilde{f}(x_{i+1}) - \tilde{f}(x_{i-1})}{2h}}_{\text{iloraz różnicowy aproksymacja}} + \underbrace{\frac{e_{i+1} - e_{i-1}}{2h}}_{\text{błąd zaokrąglenia}} - \underbrace{\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}h^2}_{\text{błąd obcięcia}}$$

Analiza błędów różniczkowania numerycznego

Błąd całkowity aproksymacji pochodnej pierwszego rzędu przy pomocy centralnego ilorazu różnicowego, składa się z:

- błędów zaokrąglenia, które maleją z krokiem
- błędów obcięcia, które zwiększają się wraz z krokiem

Przyjmując, że bezwzględna wartość każdego składnika błędu zaokrąglenia jest ograniczona od góry wartością ε, to maksimum możliwych wartości różnicy $e_{i+1} - e_{i-1}$ będzie równe 2ε.

Dalej przyjmując, że trzecia pochodna ma bezwzględną wartość maksymalną o wartości M, to górna granica wartości bezwzględnej błędu całkowitego może być przedstawiona w postaci:

(21)
$$\text{Total error} = \left| f'(x_i) - \frac{\tilde{f}(x_{i+1}) - \tilde{f}(x_{i-1})}{2h} \right| \leq \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2 M}{6}$$

Optymalny krok h, może być określony poprzez wyznaczenie pochodnej równania (19) i przyrównania wyniku do 0, rozwiązując uzyskane równanie, otrzymuje się zależność:

(22)
$$h_{opt} = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}$$

Analiza błędów różniczkowania numerycznego

Zadanie: W poprzednim zadaniu oszacowano pochodną przy pomocy centralnego ilorazu różnicowego. Wykonać te same obliczenia dla kroku $h = 1$ a następnie progresywnie zmniejszając krok poprzez jego podział przez 10 zademonstrować jak wraz z redukcją kroku, błędy obcięcia stają się dominujące. Uwaga, dokładna wartość pochodnej wynosi -0.9125.

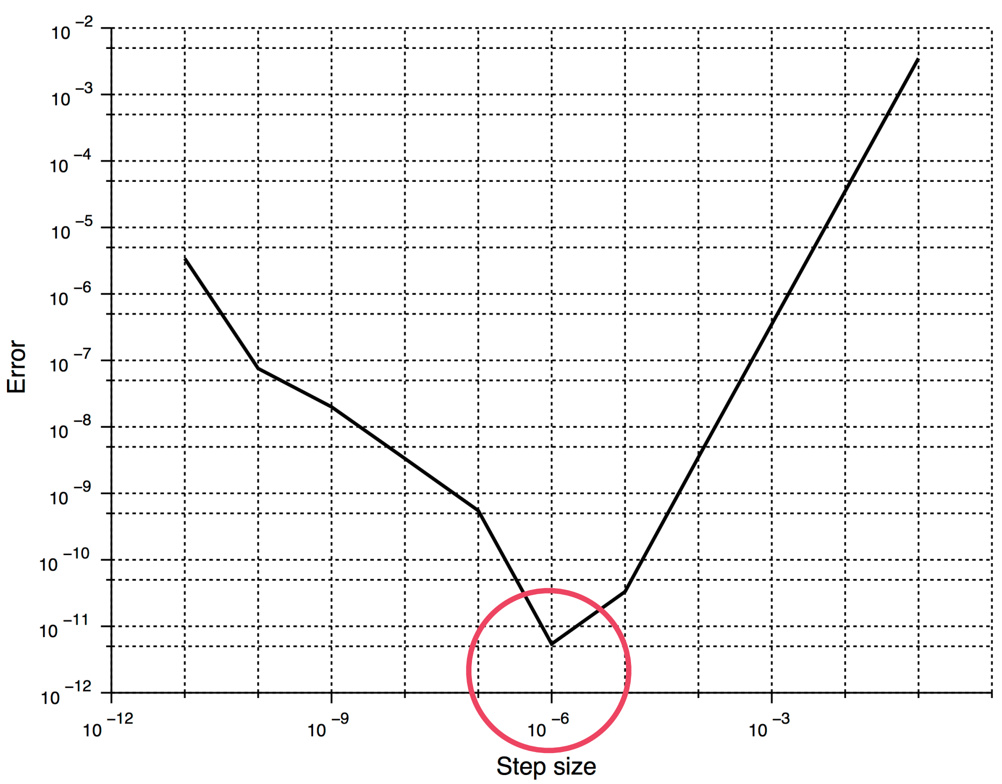
```
def f(x):
    return -0.1*x**4-0.15*x**3-0.5*x**2-0.25*x+1.2

def df(x):
    return -0.4*x**3-0.45*x**2-x-0.25

n = 11
x = 0.5
h = 1.0
dtrue = df(x)
H = np.zeros( (n,1) )
D = np.zeros( (n,1) )
E = np.zeros( (n,1) )
H[0] = h;
D[0] = ( f(x+h) - f(x-h) ) / (2.0*h);
E[0] = np.abs(dtrue - D[0]);
for i in range(1, n):
     h = h/10.0
     H[i] = h
     D[i] = (f(x+h) - f(x-h)) / (2.0*h)
     E[i] = np.abs(dtrue - D[i])

L = np.concatenate((H, D, E), axis = 1)
np.set_printoptions(precision=15, suppress=True)
print(L)
```

step size	finite difference	true error
0.1000000000	-0.91600000000000	0.0035000000000
0.0100000000	-0.91253500000000	0.0000350000000
0.0010000000	-0.91250035000001	0.0000003500000
0.0001000000	-0.91250000349985	0.0000000034998
0.0000100000	-0.91250000003318	0.0000000000332
0.0000010000	-0.91250000000542	0.0000000000054
0.0000001000	-0.91249999945031	0.0000000005497
0.0000000100	-0.91250000333609	0.0000000033361
0.0000000010	-0.91250001998944	0.0000000199894
0.0000000001	-0.91250007550059	0.0000000755006
0.0000000000	-0.91250340616966	0.0000034061697



Analiza błędów różniczkowania numerycznego

Ponieważ, w zadaniu analizowana jest łatwo różniczkowalna funkcja, można sprawdzić, czy uzyskane wyniki są zgodne z równaniem (22).

$$M = \left| f^{(3)}(0.5) \right| = |-2.4(0.5) - 0.9| = 2.1$$

Ponieważ dokładność numeryczna systemu PYTHON wynosi około 10^{-16}, można z grubsza przyjąć, że górna granica zaokrąglenia wyniesie $\varepsilon = 0.5\text{x}10^{-16}$.

Z zależności (22) wynika:

$$h_{opt} = \sqrt[3]{\frac{3(0.5 \times 10^{-16})}{2.1}} = 4.3 \times 10^{-6}$$

co jest tym samym rzędem $1\text{x}10^{-6}$ jaki został uzyskany z systemu PYTHON.

Formuły różniczkowania o wysokiej dokładności

Progresywny szereg Tylora może być zapisany jak poprzednio (13):

(23) $$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \cdots$$

i przekształcony do postaci:

(24) $$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2!}h + O(h^2)$$

dotychczas, wyraz drugiej pochodnej był obcinany (15):

(25) $$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

W przeciwieństwie do tego podejścia, tym razem wyraz z drugiej pochodnej zostanie zachowany. Druga pochodna określona była wzorem (18):

(26) $$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

Podstawiając (26) do (24), uzyskuje się:

(27) $$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}h + O(h^2)$$

a po uporządkowaniu:

(28) $$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

Formuły różniczkowania o wysokiej dokładności

W podobny sposób wyprowadzone mogą być ilorazy: regresywne i centralne, również dla pochodnych wyższego rzędu. Poniżej zestawiono ilorazy progresywne:

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$	$O(h^2)$

Formuły różniczkowania o wysokiej dokładności

Poniżej zestawiono ilorazy regresywne:

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})}{h^4}$	$O(h^2)$

Formuły różniczkowania o wysokiej dokładności

Poniżej zestawiono ilorazy centralne:

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$	$O(h^2)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}$	$O(h^4)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$	$O(h^2)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}$	$O(h^4)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3}$	$O(h^2)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3}$	$O(h^4)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4}$	$O(h^2)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{6h^4}$	$O(h^4)$

Formuły różniczkowania o wysokiej dokładności

Zadanie: W pierwszym zadaniu oszacowano pochodną przy pomocy centralnego ilorazu różnicowego dla kroku $h = 0.5$ i $h = 0.25$. Powtórzyć obliczenia stosując dokładniejsze wzory. Uwaga, dokładna wartość pochodnej wynosi *-0.9125*.

Wymagane dane:

$$
\begin{aligned}
x_{i-2} &= 0 & f(x_{i-2}) &= 1.2 \\
x_{i-1} &= 0.25 & f(x_{i-1}) &= 1.1035156 \\
x_i &= 0.5 & f(x_i) &= 0.925 \\
x_{i+1} &= 0.75 & f(x_{i+1}) &= 0.6363281 \\
x_{i+2} &= 1 & f(x_{i+2}) &= 0.2
\end{aligned}
$$

Progresywny iloraz różnicowy $O(h^2)$:

$$f'(0.5) = \frac{-0.2 + 4(0.6363281) - 3(0.925)}{2(0.25)} = -0.859375 \qquad \varepsilon_t = 5.82\%$$

Regresywny iloraz różnicowy $O(h^2)$:

$$f'(0.5) = \frac{3(0.925) - 4(1.1035156) + 1.2}{2(0.25)} = -0.878125 \qquad \varepsilon_t = 3.77\%$$

Centralny iloraz różnicowy $O(h^4)$:

$$f'(0.5) = \frac{-0.2 + 8(0.6363281) - 8(1.1035156) + 1.2}{12(0.25)} = -0.9125 \qquad \varepsilon_t = 0\%$$

Uwaga: *0%* ponieważ funkcja *f(x)* jest wielomianem *4* stopnia.

Ekstrapolacja Richardsona

Przedstawione sposoby poprawy dokładności różniczkowania numerycznego to:

- zmniejszenie kroku
- użycie formuły wyższego rzędu, która wykorzystuje większą ilość punktów

Trzecim sposobem jest zastosowanie ekstrapolacji Richardsona.

$$D = \frac{4}{3}D(h_2) - \frac{1}{3}D(h_1) \tag{29}$$

Dla centralnych ilorazów różnicowych, o błędzie obcięcia równym $O(h^2)$, formuła (29) wyznaczy przybliżenie pochodnej z błędem $O(h^4)$.

Uwaga: Podobnie jak dla obliczania całek, dokładność pochodnej może być poprawiana poprzez zastosowanie schematu Romberga.

Ekstrapolacja Richardsona

Zadanie: Używając funkcji z zadania 1 obliczyć pierwszą pochodną w punkcie $x = 0.5$, wykorzystując kroki $h = 0.5$ oraz $h = 0.25$. Zastosować metodę ekstrapolacji Richardsona. Uwaga, dokładna wartość pochodnej wynosi *-0.9125*.

Pierwsza pochodna obliczona przy pomocy centralnego ilorazu różnicowego:

$$D(0.5) = \frac{0.2 - 1.2}{1} = -1.0 \qquad \varepsilon_t = -9.6\%$$

$$D(0.25) = \frac{0.6363281 - 1.103516}{0.5} = -0.934375 \qquad \varepsilon_t = -2.4\%$$

Ekstrapolacja Richardsona:

$$D = \frac{4}{3}(-0.934375) - \frac{1}{3}(-1) = -0.9125$$