Metody numeryczne

Wykład 5

Michał Łaskawski

5 maja 2016

Aproksymacja

Aproksymacja polega na opisaniu:

- zbyt złożonej funkcji, funkcją uproszczoną lub
- funkcji w postaci dyskretnej (np. zbioru punktów pomiarowych)

W każdym z tych przypadków poszukuje się funkcji, która dobrze przybliża funkcję pierwotną.

Zadanie aproksymacji optymalnej w bazie jednomianów polega na dobraniu wielomianu aproksymującego $P(x)$ w taki sposób, aby najlepiej przybliżał on funkcję aproksymowaną $f(x)$.

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=1}^{m} a_k x^k = \mathbf{p}(x)\mathbf{a} \qquad (1)$$

$\mathbf{p} = [1\ x\ \ldots\ x^m]$ - wektor wierszowy jednomianów
$\mathbf{a} = [a_0\ a_1\ \ldots\ a_m]^T$ - wektor kolumnowy nieznanych parametrów aproksymacji

Aproksymacja

Twierdzenie Weierstrassa

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest określona i ciągła w przedziale $[a, b]$ i dane jest $\epsilon > 0$, to wówczas istnieje wielomian $P(x)$, określony w $[a, b]$, taki że:

$$\|f(x) - P(x)\| < \epsilon \quad \text{dla każdego} \quad x \in [a, b] \tag{2}$$

UWAGA:

Z twierdzenia Weierstrassa wynika, że zawsze można wyznaczyć taki wielomian $P(x)$, który będzie wystarczająco bliski danej funkcji.

UWAGA:

Określenie stopnia m wielomianu aproksymującego nie jest ściśle sprecyzowane i może decydować o jakości aproksymacji.

Aproksymacja

Aproksymacja punktowa

Dla aproksymacji punktowej, funkcja $f(x)$ dana jest w formie dyskretnej w postaci zbioru punktów wartości funkcji $\mathbf{F} = [f_0, f_1, \ldots, f_n]^T$ (gdzie: $f_i \equiv f(x_i)$) w węzłach aproksymacji $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$

W ogólnym przypadku wielomian aproksymujący $P(x)$ może być przedstawiony w postaci wielomianu uogólnionego:

$$P(x) = a_m u_m(x) + a_{m-1} u_{m-1}(x) + \cdots + a_0 u_0(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k u_k = \mathbf{p}(x)\mathbf{a} \qquad (3)$$

gdzie, $\mathbf{p}$ jest macierzą jednowierszową funkcji bazowych $u_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ znanych i liniowo niezależnych

$$\mathbf{p}(x) = [u_0(x), u_1(x), \ldots, u_m(x)] \qquad (4)$$

Aproksymacja

Kryteriów oceny jakości aproksymacji jest wiele. W praktyce najczęściej wykorzystywanym kryterium jest kryterium najmniejszych kwadratów.

Błąd ϵ dla metody najmniejszych kwadratów określa zależność:

$$\epsilon = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - P(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - \mathbf{p}(x_i)\mathbf{a}]^2 \tag{5}$$

Warunek konieczny istnienia minimum funkcji $\epsilon(a_0, a_1, \ldots, a_m)$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{a}} = 0 \rightarrow \left[\sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}^T(x_i)\mathbf{p}(x_i) \right] \mathbf{a} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}^T(x_i) f(x_i) \tag{6}$$

Równanie (6) jest liniowym układem równań.

Aproksymacja

Przyjmując oznaczenia macierzy:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}^T(x_i)\mathbf{p}(x_i) \qquad \mathbf{B} = \left[\mathbf{p}^T(x_0)\ \mathbf{p}^T(x_i)\ \ldots\ \mathbf{p}^T(x_n)\right] \tag{7}$$

równanie (6) można zapisać w formie:

$$\mathbf{Aa} = \mathbf{BF} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{BF} \tag{8}$$

UWAGA:

Macierz $\mathbf{A}$ z równania (7) można przedstawić w postaci iloczynu wektorów:

$$\mathbf{A} = \mathbf{BB}^T \tag{9}$$

W związku z czym równania (8) mogą przyjąć formę:

$$\mathbf{BB}^T\mathbf{a} = \mathbf{BF} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{a} = \left(\mathbf{BB}^T\right)^{-1}\mathbf{BF} \tag{10}$$

Aproksymacja

UWAGA:

W językach SCILAB / MATLAB, równanie (10) można przedstawić w uproszczonej formie przy użyciu operatora dzielenie lewostronnego:

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}^{'} \setminus \mathbf{F} \tag{11}$$

gdzie, $'$ jest operatorem transponowania ^{T}.

Podstawiając uzyskane rozwiązanie (8) do wzoru (3) uzyskuje się zależność na wielomian uogólniony:

$$P(x) = \mathbf{p}(x)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{F} = \mathbf{p}(x)\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^{T}\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{F} = \mathbf{N}(x)\mathbf{F} \tag{12}$$

Współczynnikami kombinacji liniowej funkcji $N_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, są znane wartości funkcji $f(x_i)$ zawarte w wektorze $\mathbf{F}$.

Aproksymacja

Przykład:

Wyznaczyć wielomian aproksymujący dane pomiarowe zawarte w tabeli 1.

Przyjąć, że wielomian aproksymujący ma postać: $P(x) = a_0 + a_1 x$.

Tabela: Dane pomiarowe

i	0	1	2	3
x_i	2	4	6	8
$f(x_i)$	2	11	28	40

Rozwiązanie:

Dla danych pomiarowych: $n = 3$, dla przyjętej postaci funkcji aproksymującej: $m = 1$.

$$\mathbf{p}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix}$$

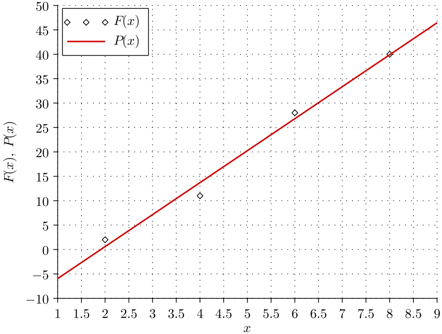
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(x_0)^T & \mathbf{p}(x_1)^T & \mathbf{p}(x_2)^T & \mathbf{p}(x_3)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 28 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.25 \\ -0.25 & 0.05 \end{bmatrix} \quad \mathbf{BF} = \begin{bmatrix} 81 \\ 536 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} = \left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right)^{-1}\mathbf{BF} = \begin{bmatrix} -12.5 \\ 6.66 \end{bmatrix}$$

Aproksymacja

W programie SCILAB lub MATLAB, zadanie można rozwiązać definiując macierz $\mathbf{B}$ oraz wektor $\mathbf{F}$ a następnie korzystając z operatora dzielenie lewostronnego:

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}^{'} \setminus \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -12.5 \\ 6.55 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad P(x) = -12.5 + 6.55x$$



Rysunek: Aproksymacja metodą najmniejszych kwadratów

Najmniejszy błąd (5) metody dla przyjętego wielomianu: $\epsilon = 10.7$.

Aproksymacja

Przykład:

Wyznaczyć wielomian aproksymujący dane pomiarowe zawarte w tabeli 2.

Przyjąć, że wielomian aproksymujący ma postać: $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Tabela: Dane pomiarowe

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x_i)$	1	1.2	1.6	2.1	2.7

Rozwiązanie:

Dla danych pomiarowych: $n = 4$, dla przyjętej postaci funkcji aproksymującej: $m = 2$.

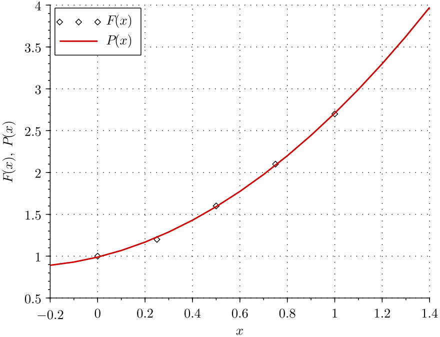
$$\mathbf{p}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}^T = [1 \quad 1.2 \quad 2.6 \quad 2.1 \quad 2.7]$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(x_0)^T \; \mathbf{p}(x_1)^T \; \mathbf{p}(x_2)^T \; \mathbf{p}(x_3)^T \; \mathbf{p}(x_4)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0.75 & 1 \\ 0 & 0.0625 & 0.25 & 0.5625 & 1 \end{bmatrix}$$

Aproksymacja

$$\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.88 & -3.08 & 2.285 \\ -3.08 & 19.88 & -18.28 \\ 2.28 & -18.28 & 18.28 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{BF} = \begin{bmatrix} 8.6 \\ 5.37 \\ 4.36 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right)^{-1}\mathbf{BF} = \mathbf{B}' \setminus \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.98 \\ 0.69 \\ 1.02 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad P(x) = 0.98 + 0.69x + 1.02x^2$$

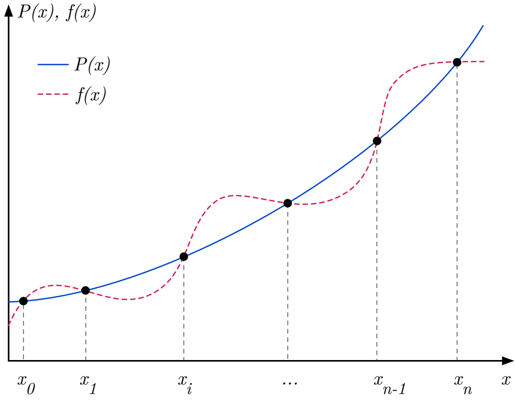


Rysunek: Aproksymacja metodą najmniejszych kwadratów, $\epsilon = 1.14 \cdot 10^{-3}$

Interpolacja

Interpolacja funkcji $f(x)$ jest szczególnym przypadkiem aproksymacji gdy $m = n$.

W węzłach interpolacji $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ wartość funkcji interpolacyjnej $P(x)$ jest równa wartościom funkcji interpolowanej $f(x)$.



Rysunek: Interpolacja

Interpolacja

Wyrażenia dotyczące aproksymacji punktowej są również adekwatne dla przypadku interpolacji. Prościej jednak wykorzystać warunek:

$$P(x_i) = f(x_i) \qquad \text{dla} \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{13}$$

Jeżeli za wielomian uogólniony (3) przyjęta zostanie funkcja interpolacyjna, to równanie (13) przyjmie postać:

$$\mathbf{p}(x_i)\,\mathbf{a} = f_i \qquad \text{dla} \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{14}$$

lub w zapisie macierzowym:

$$\mathbf{B}^T\mathbf{a} = \mathbf{F} \tag{15}$$

gdzie:

$$\mathbf{B}^T = \left[\mathbf{p}^T(x_0)\ \mathbf{p}^T(x_i)\ \ldots\ \mathbf{p}^T(x_n)\right]^T = \begin{bmatrix} u_0(x_0) & u_1(x_0) & \ldots & u_n(x_0) \\ u_0(x_1) & u_1(x_1) & \ldots & u_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_0(x_n) & u_1(x_n) & \ldots & u_n(x_n) \end{bmatrix}$$

Interpolacja

$$\mathbf{a} = [a_0 \quad a_1 \quad \ldots a_n]^T \qquad\qquad \mathbf{F} = [f_0 \quad f_1 \ldots f_n]$$

Podstawiając równanie (15):

$$\mathbf{a} = \left(\mathbf{B}^T\right)^{(-1)} \mathbf{F}$$

do wielomianu uogólnionego (3):

$$P(x) = \mathbf{p}(x)\mathbf{a}$$

otrzymuje się wielomian interpolacyjny w postaci:

$$P(x) = \mathbf{p}(x)\mathbf{a} = \mathbf{p}(x)\left(\mathbf{B}^T\right)^{(-1)} \mathbf{F} = \mathbf{N}(x)\mathbf{F} \tag{16}$$

gdzie, $\mathbf{N}(x)$ składa się z liniowo niezależnych funkcji (baza interpolacyjna):

$$\mathbf{N}(x) = \mathbf{p}(x)\left(\mathbf{B}^T\right)^{(-1)} = [N_0(x) \quad N_1(x) \quad \ldots \quad N_n(x)] \tag{17}$$

Interpolacja

Jeżeli:

$$\mathbf{p}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{bmatrix}$$

to układ równań (15) przyjmie postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Baza $N(x)$ stanowi wówczas bazę Lagrangea utworzoną z wielomianów bazowych Lagrangea n-tego stopnia.

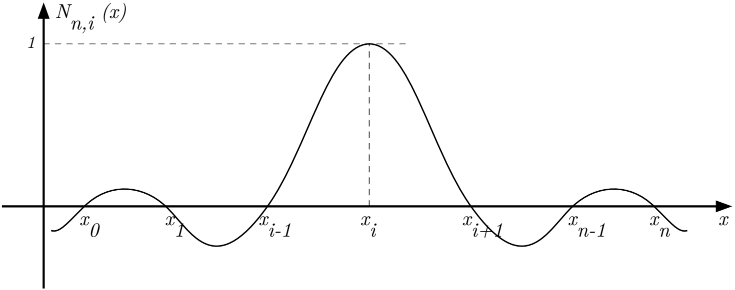
Wielomian interpolacyjny n - tego stopnia w ogólnej postaci:

$$N_{n,i}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{j=n} \frac{x - x_i}{x_i - x_j} \tag{18}$$

Interpolacja

Wielomian interpolacyjny n - tego stopnia w ogólnej postaci:

$$N_{n,i}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (19)$$



Rysunek: Funkcja Lagrangea $N_{n,i}(x)$

Interpolacja

Ze wzoru (16):

$$P(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{F}$$

określającego postać wielomianu interpolacyjnego oraz własności funkcji Lagrangea: $N_{n,k}(x_i) = \delta_{ki}$

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad k = i \\ 0 & \text{gdy} \quad k \neq i \end{cases}$$

Wynika zależność:

$$\sum_{k=0}^{n} N_{n,k}(x) = 1 \tag{20}$$

która określa warunek kompletności zerowego rzędu dla funkcji bazowych.

Jeżeli funkcje bazowe spełniają warunek kompletności do rzędu p, to oznacza to, że przez ich kombinację liniową można dokładnie przedstawić dowolny wielomian algebraiczny aż do rzędu p.

Interpolacja

W praktyce warunki kompletności wykorzystuje się do sprawdzenia poprawności wyników obliczeń funkcji bazowych Lagrangea.

Błąd interpolacji:

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \tag{21}$$

gdzie, $f \in C^{n+1}[a,b]$, $\xi \in (a,b) \wedge \xi \neq x_i \ \forall\, i = 0, 1, \dots, n$.

Przykład:

Wyznaczyć wielomian interpolacyjny $n = 2$ stopnia, przybliżający funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$. Przyjąć węzły interpolacji: $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$.

Interpolacja

Rozwiązanie:

$$\mathbf{p}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}(x)^T = [0.5 \quad 0.4 \quad 0.25]$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2.5 & 6.25 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \qquad \left(\mathbf{B}^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -32/3 & 5/3 \\ -6.5 & 24/3 & -4.5/3 \\ 1 & -4/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}(x) = \mathbf{p}(x)\left(\mathbf{B}^T\right)^{(-1)} = \begin{bmatrix} 10 - 6.5x + x^2 \\ \frac{1}{3}\left(-32 + 24 - 4x^2\right) \\ \frac{1}{3}\left(5 - 4.5 + x^2\right) \end{bmatrix}$$

Wielomian interpolacyjny

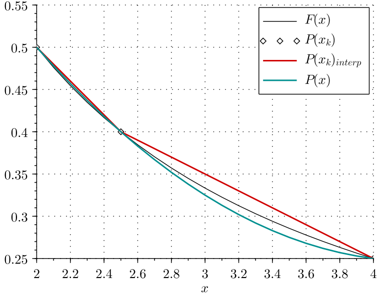
$$\mathbf{P}(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1.15 & 0.425x & 0.05x^2 \end{bmatrix}$$

UWAGA:

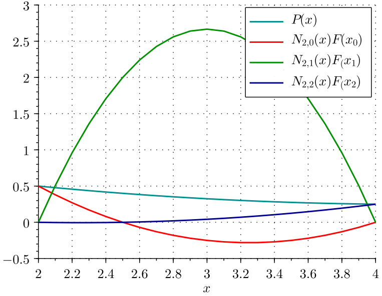
Współczynniki wielomianu interpolacyjnego można uzyskać:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{F} \qquad \text{lub w systemach SCILAB / MATLAB:} \qquad \mathbf{P} = \mathbf{B}' \setminus \mathbf{F}$$

Interpolacja



(a) Funkcja interpolowana



(b) Wielomiany $\mathbf{N}$

Rysunek: Interpolacja

Dla przykładu:

$P(3) = 0.325,\ f(3) = \frac{1}{3} \approx 0.(3).$