Metody numeryczne

Instrukcja 5

Różniczkowanie

Robert Kazała

1 Różniczkowanie

1.1 Pochodne funkcji

Różniczkowanie jest procesem wyznaczania pochodnej (lub różniczki) funkcji.

Pochodna funkcji jest miarą szybkości zmian wartości funkcji względem zmian jej argumentów.

Matematyczna definicja pochodnej wywodzi się z aproksymacji różnicowej:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \qquad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

y, f(x) - wartość funkcji (zmienna zależna), x - argument funkcji (zmienna niezależna)

dy/dx (lub y' lub f'(xi)) jest pierwszą pochodną y w odniesieniu do x w punkcie x_i.

Druga pochodna jest pochodną pierwszej pochodnej.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Druga pochodna informuje o tym, jak szybko zmienia się nachylenie.
Druga pochodna często nazywana jest krzywizną, gdyż większa wartość drugiej pochodnej oznacza większą krzywiznę krzywej.

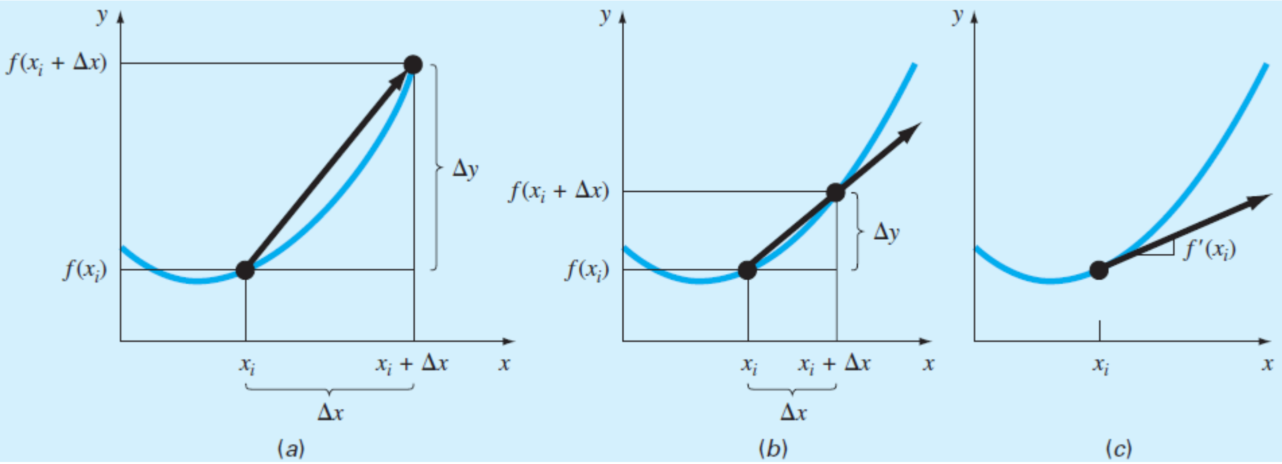
1.2 Pochodna cząstkowa funkcji

W przypadku większej liczby argumentów wyznacza się pochodne cząstkowe, które są pochodnymi wyznaczanymi oddzielnie dla każdego z argumentów, przy założeniu braku zmian pozostałych argumentów.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

1.3 Graficzna definicja pochodnej

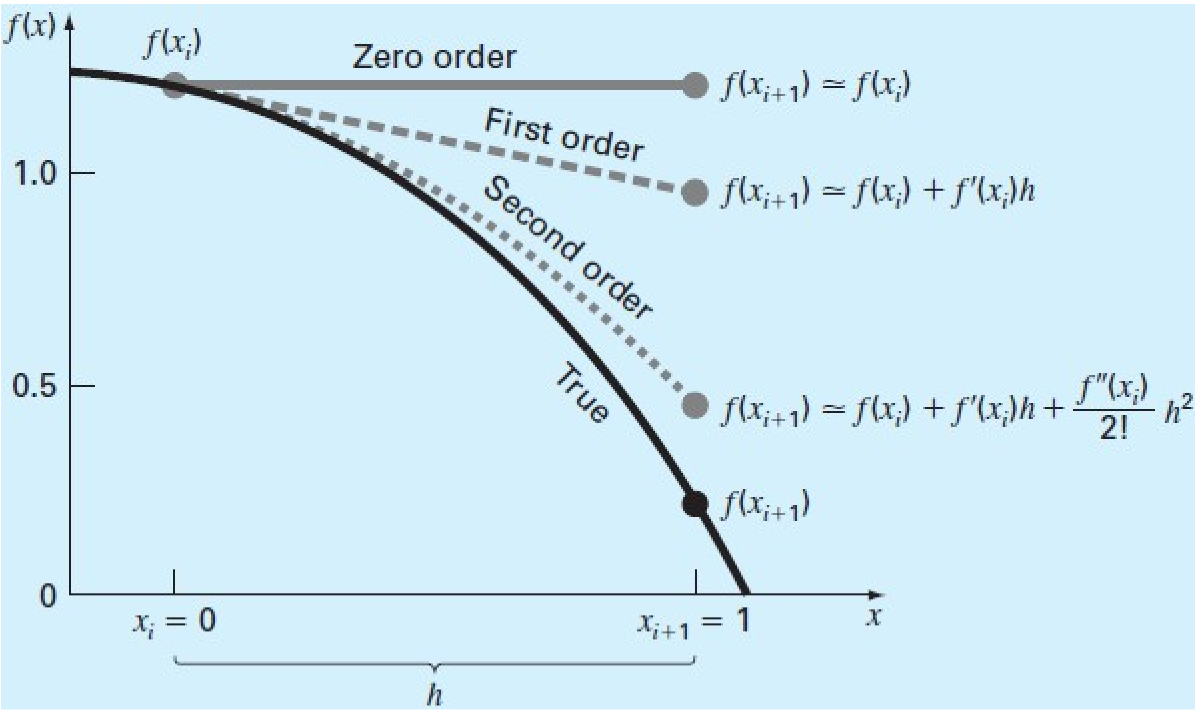
Jeżeli $\Delta x \to 0$, (rysunek od a do c), aproksymacja różnicowa staje się pochodną.



Pochodna jest nachyleniem stycznej do krzywej w punkcie x_i.

1.4 Szeregi Tylora

Twierdzenie Tylora stwierdza, że każdą gładką funkcję można aproksymować przy pomocy wielomianu. Szeregi Tylora są matematycznym narzędziem, który to umożliwia.



Kompletny szereg Tylora:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n \qquad R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

1.5 Pochodne drugiego rzędu

Progresywny iloraz różnicowy drugiego rzędu

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

Iloraz regresywny:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + O(h)$$

Iloraz centralny:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

1.6 Formuły różniczkowania o wysokiej dokładności

Na podstawie szeregu Taylora mogą być wyprowadzone formuły pozwalające wyznaczać pochodne z większą dokładnością.

Ilorazy progresywne:

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$	$O(h^2)$

Ilorazy regresywne

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})}{h^4}$	$O(h^2)$

Ilorazy centralne

First Derivative | Error

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} \qquad O(h^2)$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h} \qquad O(h^4)$$

Second Derivative

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} \qquad O(h^2)$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2} \qquad O(h^4)$$

Third Derivative

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3} \qquad O(h^2)$$

$$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3} \qquad O(h^4)$$

Fourth Derivative

$$f''''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4} \qquad O(h^2)$$

$$f''''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{6h^4} \qquad O(h^4)$$

2.1 Zadania do wykonania

Zadanie 1

Wyznaczyć w sposób analityczny i numeryczny wartość pierwszej pochodnej funkcji

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

w punkcie x=0.5 dla kroku h=0.5 i h=0.25, dla ilorazu progresywnego, regresywnego i centralnego.

Zadanie 2

Dla funkcji z zadania 1 wyznaczyć wykres funkcji w formie graficznej dla zadanego kroku h=0.5 i h=0.25 oraz dwóch dodatkowych kroków (większego i mniejszego od podanych) pochodnych pierwszego rzędu i drugiego rzędu (punkty 1.1 i 1.5). Wyznaczyć ilorazy progresywne, regresywne i centralne oraz wyznaczyć i przedstawić wykresy błędów.

Zadanie 3

Napisać zestaw funkcji pozwalający wyznaczać pochodne z wykorzystaniem formuł o zwiększonej dokładności.

Zadanie 4

Wykorzystując formuły różniczkowania wysokiej dokładności zrealizować zakres z zadania 2 i porównać wyniki.

Zadanie 5

Dla kilku własnych funkcji dokonać różniczkowania analitycznego i numerycznego z różną dokładnością i dla różnych kroków. Przedstawić wykresy funkcji i jej pochodnych oraz wykresy błędów.

Zadanie 6

Sprawdzić jak zakłócenia wpływają na wyznaczanie pochodnych z zadania 5 (zmienić ręcznie wartości dla wybranych punktów, dodać do przebiegu szum z generatora losowego).