Metody numeryczne

Instrukcja 3

Przybliżone metody rozwiązywania równań nieliniowych

Robert Kazała

1 Metody rozwiązywania równań nieliniowych

1.1 Metoda bisekcji

Dane jest równanie f(x) = 0, przy czym funkcja f(x) jest ciągła i monotoniczna w przedziale izolacji [a, b] pierwiastka ξ. Algorytm wyznaczenia pierwiastka według metody połowienia jest następujący:
1. Podzielić przedział [a, b] na połowę, środek przedziału określa zależność:

$$x=\frac{1}{2}(a+b) \quad (1)$$

2. Jeżeli spełniony jest warunek:

$$|f(x)|<\delta$$

gdzie: δ jest przyjętą dokładnością przybliżenia rozwiązania, to przyjąć że x jest pierwiastkiem ξ funkcji f(x) w przedziale izolacji [a, b].
3. Jeżeli warunek (2) nie jest spełniony, to odrzucić przedział [x, b] (przyjąć: b = x), gdy spełniony jest warunek:

$$f(a) \cdot f(x) < 0 \quad (3)$$

Gdy warunek (3) nie jest spełniony, to należny odrzucić przedział [a, x] (przyjąć: a = x).
4. Powrócić do kroku: 1.

Przykładowy program w języku Python wyznaczania rozwiązania metodą bisekcji

```
def f(x):
      "Definicja funkcji”
      return 0.5 * x ** 2 + 0.5 * x - 0.5

# Metoda bisekcji
iter = 100
delta = 0.00001
a = -2.25
b = 1.5
for k in range(1, iter):
      x = (a + b) / 2
      if abs(f(x)) < delta:
            break
      else:
            if f(x) * f(a) < 0:
                  b = x
            else:
                  a = x
```

1.2 Metoda siecznych

Dane jest równanie f(x) = 0, przy czym funkcja f(x) jest klasy $C^{(2)}$ w przedziale izolacji pierwiastka [a, b]. Algorytm wyznaczenia pierwiastka według metody siecznych jest następujący:
1. Wyznaczyć punkt przecięcia siecznej przechodzącej przez punkty: a oraz b z osia OX:

$$x=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a) \quad (4)$$

2. Jeżeli spełniony jest warunek:

$$|f(x)| < \delta \quad (5)$$

gdzie: δ jest przyjętą dokładnością przybliżenia rozwiązania, to przyjąć że x jest pierwiastkiem δ funkcji f(x) w przedziale izolacji [a, b].
3. Jeżeli warunek (5) nie jest spełniony, to sprawdzić czy funkcja f w punktach a oraz x przyjmuje jednocześnie wartości nad czy pod osia OX:

$$f(a) \cdot f(x) > 0 \ (6)$$

Jeżeli warunek (6) jest spełniony, to ograniczyć przedział [a, b] z lewej strony, przyjmując a = x. W przeciwnym przypadku ograniczyć przedział [a, b] z prawej strony, przyjmując b = x.
4. Powrócić do kroku: 1.

1.3 Metoda stycznych (Newtona)

Dane jest równanie f(x) = 0, które posiada pierwiastek # w przedziale izolacji [a, b] w którym funkcje $f^{(1)}(x)$ oraz $f^{(2)}(x)$ są ciągłe i nie zmieniają znaku. Algorytm wyznaczenia pierwiastka według metody stycznych jest następujący:
1. Przyjąć punkt początkowy: $x \in [a, b]$.
2. Wyznaczyć punkt przecięcia stycznej do funkcji f(x) z osią OX:

$$x = x - \frac{f(x)}{f^{(1)}(x)} \quad (7)$$

Uwaga: pierwsza pochodna funkcji f w puncie x przybliżyć przy pomocy ilorazu różnicowego:

$$f^{(1)}(x) \approx \frac{f\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right) - f\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right)}{\Delta x} \quad (8)$$

gdzie: Δx jest przyjętą długością odcinka.
3. Sprawdzić czy spełniony jest warunek:

$$|f(x)| < \delta \quad (9)$$

gdzie: δ jest przyjętą dokładnością przybliżenia rozwiązania. Jeżeli warunek (9) jest spełniony, to przyjąć że x jest pierwiastkiem δ funkcji f(x) w przedziale izolacji [a, b].
4. Jeżeli warunek (9) nie jest spełniony to powrócić do kroku 2.

1.4 Zadania do wykonania

Zadanie 1

Narysować wykres funkcji i napisać program w języku Python, który przy pomocy metody bisekcji wyznacza wartość pierwiastka funkcji:

$$y(x) = x^2 + x - 1$$

w przedziale izolacji [0.05, 0.95].

Zadanie 2
Sprawdzić zachowanie metody bisekcji dla funkcji:

$$y(x) = -x^2 + x - 1/5$$

w przedziałach izolacji: [0.05, 0.95], [0.1, 0.4] oraz [0.6, 0.9]

Zadanie 3

Napisac program w jezyku Python, który przy pomocy metody siecznych wyznacza wartość pierwiastka funkcji:

1. $y(x)=\frac{e^{5x}}{100}-\frac{1}{4}$
2. $y(x)=-e^{-5x}+\frac{1}{4}$
3. $y(x)=e^{-5x}-\frac{1}{4}$
4. $y(x)=\frac{e^{5x}}{100}+\frac{1}{2}$

w przedziale izolacji [0.05, 0.95].

Zadanie 4

Napisać program w języku Python, który przy pomocy metody Newtona wyznacza wartość pierwiastka funkcji 1 z zadania 3 dla punktu początkowego x = 0.1 a następnie dla punktu x = 0.9. Dla podanych przypadków przyjąć dokładność przybliżenia $\delta = 1e^{-3}$, porównać zbieżność metody (ile kroków iteracji jest niezbędnych do osiągnięcia zadanej dokładności przybliżenia rozwiązania).

Zadanie 5

Sprawdzić działanie metody Newtona dla funkcji:

$y(x) = x^5 - x + 1$ dla punktu początkowego x = 0.

$y(x) = x(1 - x)$ dla punktu początkowego x = 1/2

Zadanie 6

Zapoznać się z działaniem funkcji *root_scalar* z pakietu *scipy.optimize*. Dla wybranych własnych funkcji znaleźć rozwiązania za pomocą różnych metod wykorzystując funkcję *root_scalar* z pakietu *scipy.optimize*. Porównać ilość kroków i dokładność rozwiązania.